Dr. M. Friesen WS 2016/2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 1

Blatt 3

Aufgabe 1 *(6 Punkte)*

1. Sei
$$p_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}x^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, dass für jede stetige, beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$\int_{\mathbb{R}} f(x) p_n(x) \mathrm{d}x \longrightarrow f(0), \quad n \to \infty.$$
gilt.

2. Sei $\mu_n(A) := n \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(A)$. Zeigen Sie, dass für jede stetige, beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt
$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}\mu_n(x) \longrightarrow f(0), \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 2 *(3 Punkte)*
Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $F_1, \dots, F_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ Verteilungsfunktionen. Definiere $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ durch
$$F(t_1, \dots, t_n) := F_1(t_1) \cdots F_n(t_n), \quad t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie:

1. $\lim\limits_{t_1,\dots,t_n \to -\infty} F(t_1, \dots, t_n) = 0$ und $\lim\limits_{t_1,\dots,t_n \to \infty} F(t_1, \dots, t_n) = 1$.
2. $F(t_1, \dots, t_n)$ ist rechtsstetig.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Seien X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

   $X_n \longrightarrow X$ in Wahrscheinlichkeit $\longrightarrow f(X_n) \longrightarrow f(X)$ in Wahrscheinlichkeit .

   Hinweise:

(i) Nehmen Sie zunächst an, dass ein k existiert mit $|X(\omega)| \leq k$ für alle $\omega \in \Omega$. Nutzen Sie die gleichmässige Stetigkeit von f auf der kompakten Menge $[-k-1, k+1]$.

(ii) Verallgemeinern Sie Ihren Beweis ohne die zusätzliche Annahme von (i).

2. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass bei der obigen Aussage nicht auf die Stetigkeit von f verzichtet werden kann.
Hinweis: Wählen sie $f(x) = \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$ und betrachten Sie eine geeignete Folge von Zufallsvariablen $X_n \longrightarrow 0$.

Aufgabe 4 *(3 Punkte)*
Seien X und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$X_n \longrightarrow X \text{ in Wahrscheinlichkeit} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) = 0.$$